

Regelungstheorie: Mathematische Optimierungsmethoden

Institut für Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. A. Albert

12. Dezember 2011

Vorwort

Die Vorlesung behandelt einige Aspekte der mathematischen Optimierung, die in engem Zusammenhang zur Regelungstechnik stehen. Diese sind die Parameteridentifikation (die allerdings ausführlich in einer eigenständigen Vorlesung behandelt wird), die optimale Steuerung und die optimale Regelung. Die optimale Schätzung / Filterung wird kurz eingeführt als ein duales Problem. Für Details wird aber auch hier auf die entsprechende Spezialvorlesung verwiesen.

Das weite Gebiet der Optimierung ist derart umfangreich, dass diese Vorlesung keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann. Vielmehr erfolgt eine Auswahl für den Regelungstechniker und eine Erklärung der mathematischen Zusammenhänge findet nur insoweit statt, wie es für das Verständnis aus Ingenieursicht erforderlich scheint.

Die Vorlesung beinhaltet zwei Schwerpunkte – einerseits Optimierungsverfahren, die in unmittelbarem Zusammenhang zu regelungstechnischen Aufgaben stehen und andererseits numerische Optimierungsverfahren.

Der Stoff wird in 6 großen Blöcken vermittelt (vgl. Bild 1). Der erste Block handelt von Gütefunktionen und -funktionalen. Daran schließen sich Optimalitätsbedingungen und Optimierungsverfahren an. Auf Grundlage der klassischen Variationsrechnung findet dann sukzessive die Ableitung der optimalen Steuerung und Regelung statt. Es wird die Dualität zur optimalen Schätzung und Filterung aufgezeigt. Den Abschluss macht das Pontrjaginsche Maximumprinzip, das zusätzlich die Behandlung von Stellgrößenbeschränkungen erlaubt.

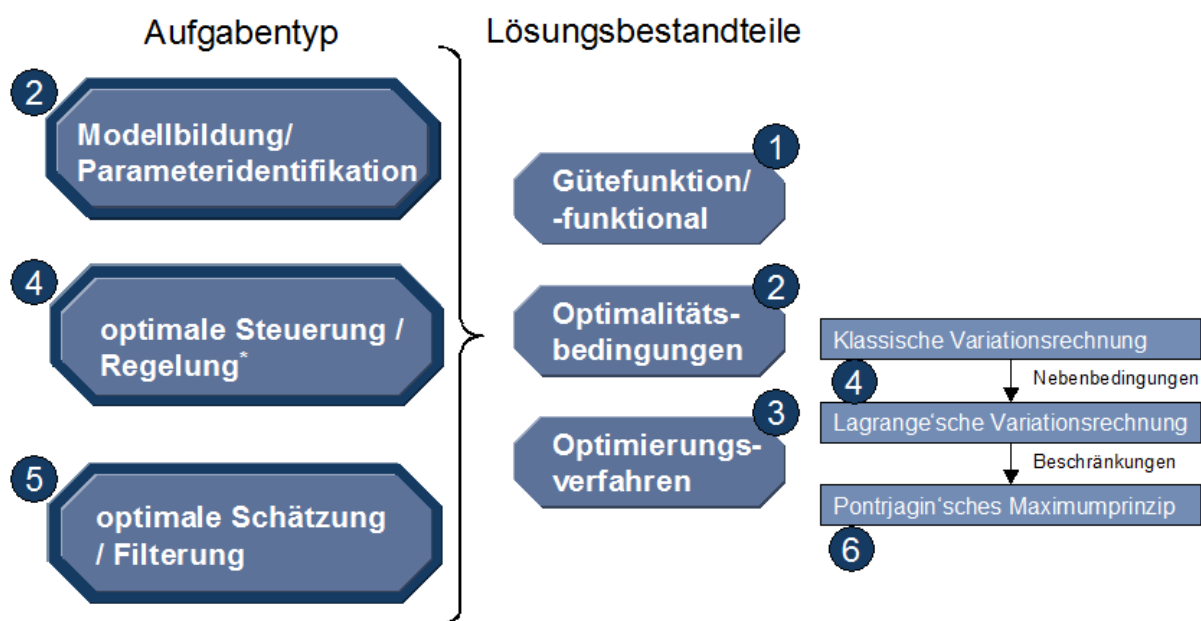
Die Teilnahme an der Vorlesung soll dem Studenten die Begriffe der Optimierung näher bringen und ihn in die Lage versetzen, für regelungstechnische Problemstellungen geeignete Vorgehensweisen zu entwickeln und gegebenenfalls zu implementieren. Des Weiteren sollte er bei Einsatz entsprechender Routinen unter computergestützten Entwurfswerkzeugen wie etwa Matlab/Simulink[©] wissen, welchem Grundprinzip die gewählten Verfahren unterliegen und welche Vor- bzw. Nachteile zu erwarten sind. Somit stellen die Inhalte der Vorlesung auch eine solide Basis für selbständiges wissenschaftliches Arbeiten zur Verfügung.

Das vorliegende Skript stellt keinen Ersatz für den Besuch der Vorlesung dar. Vielmehr besteht die Absicht darin, den Schreibaufwand während der Vorlesung zu verringern und die Aufmerksamkeit zu erhöhen. Die absichtlich frei gelassenen Felder dienen der eigenständigen Ergänzung der vorgetragenen Herleitungen, eigenen Kommentaren und Rechnungen. Erst mit diesen Ergänzungen und den begleitenden Folien ist das Skript vollständig. Im Rahmen des

Skriptes gilt die folgende Notation:

Die Darstellung von Vektoren und Matrizen erfolgt stets in fett gedruckten Buchstaben (z.B. **a** oder **A**), wobei für Matrizen ausschließlich Großbuchstaben zur Anwendung kommen. Die Transposition eines Vektors oder einer Matrix ist charakterisiert durch ein hochgestelltes T (\mathbf{A}^T). Vektoren symbolisieren stets Spaltenvektoren. Zeilenvektoren ergeben sich demnach

Inhalte im Rahmen der Vorlesung



* Parameteroptimierung führt auf gewöhnliche Extremalrechnung; hier Betrachtung Strukturoptimierung

Abbildung 1: Übersicht zur Vorlesung

durch die Transposition. Das Symbol \square markiert das Ende eines Beweises, das Symbol \blacksquare beendet ein Beispiel.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Regelungstechnische Optimierungsaufgaben	2
1.2	PowerPoint-Präsentation	7
2	Optimierungskriterien und Gütefunktionen	9
2.1	Gütemaße im Zeitbereich	9
2.1.1	'Punktuelle' Regelungsdaten	9
2.1.2	Integralkriterien	10
2.2	Gütemaße im Frequenzbereich	16
2.3	Gütemaße im Zustandsraum	19
2.4	Übungen und Fragen zur Lernkontrolle	24
3	Gewöhnliche Extremalrechnung	27
3.1	Eindeutigkeit der Lösung	28
3.2	Notwendige und hinreichende Kriterien	29
3.3	Quadratische Formen	33
3.4	Übungen und Fragen zur Lernkontrolle	34
4	Lineare Optimierung für die Parameteridentifikation	35
4.1	Moore-Penrose-Pseudoinverse	35
4.1.1	Geometrische Interpretation – Einschub: Lineare Algebra	37
4.2	Least-Squares-Verfahren (LS)	42
4.3	Das unterbestimmte lineare Gleichungssystem	46
4.4	Übungen und Fragen zur Lernkontrolle	52
5	Numerische Optimierung – Teil 1	55
5.1	Eindimensionale Optimierung (EDO)	56
5.1.1	Verfahren ohne Kenntnis des Gradienten	56
5.1.2	Verfahren bei Kenntnis des Gradienten	61
5.1.3	Zusammenfassung, Empfehlungen	62
5.2	Übungen und Fragen zur Lernkontrolle	63

6	Numerische Optimierung – Teil 2	65
6.1	Mehrdimensionale Optimierung (MDO)	65
6.2	Modellgestützte Algorithmen	68
6.3	Nichtlineare LS-Verfahren	75
6.4	Zusammenfassung	78
6.5	Übungen und Fragen zur Lernkontrolle	78
7	Grundproblem der Variationsrechnung	79
7.1	Übungen und Fragen zur Lernkontrolle	85
8	Erweiterungen des Grundproblems	87
8.1	Optimierung voneinander unabhängiger Zustände	87
8.2	Abhängigkeiten von höheren Ableitungen	89
8.3	Zur Lösung von Variationsaufgaben	91
8.4	Variationsaufgabe mit Nebenbedingungen	94
9	Transversalitätsbedingung	97
9.1	Transversalitätsbedingung beim Grundproblem	97
9.2	Spezialfälle der Transversalitätsbedingung	99
9.3	Übungen und Fragen zur Lernkontrolle	102
10	Allgemeines Optimierungsproblem	103
10.1	Übungen und Fragen zur Lernkontrolle	112
11	Lineare Quadratische Optimierung – LQ-Regelung	113
11.1	Riccati-Entwurf	114
11.2	Stationärer Riccati-Regler und die numerische Berechnung	117
11.3	Abschließende Bemerkungen zum Riccati-Regler	122
11.4	Übungen und Fragen zur Lernkontrolle	124
12	Maximumprinzip nach Pontrjagin	125
12.1	Übungen und Fragen zur Lernkontrolle	130
A	Karush-Kuhn-Tucker-Theorem	132
B	Anlernen eines MLP-Netzes	134
	Literaturverzeichnis	138